Thema 10:Approximationsgüte von Wavelets

Proseminar Wavelets und Bilddatenkompression

Universität Bonn, WS 2003/2004

Prof. Scherer, Prof. Weber

Gereon Schüller

email@gereon.de

5. Januar 2004

Wichtige Fragen über Wavelets

- Hat die *dilation equation* eine Lösung mit endlicher Energie?
- Konvergiert der Kaskadenalgorithmus gegen diese Lösung?

$\Rightarrow$ Antworten darauf durch bestimmte Filterkoeffizienten $h(k)$

$\Rightarrow$ Antworten sind alle „Ja“

Fundamentaloperatoren

$$M = (\downarrow 2)2H \text{ und } T = (\downarrow 2HH^T)$$

- $M =$Filtermatrix H (Toeplitz-Matrix) downgesampelt (Zeilen gelöscht) und mit 2 multipliziert
- M ist ein dezimierter Lowpassfilter, bei dem sich die Koeffizienten $h(k)$ notwendigerweise zu 1 addieren, d.h. $H(0) = \sum h(k) = 1$
- Auch symmetrisches Produkt HH^T ist Toeplitz-Matrix
  - Einträge sind die Koeffizienten in $|H(\omega)|^2 = |\sum h(k)e^{-ikw}|^2$
  - Zeilenshift $(\downarrow 2)$
- Im Frequenzbereich erzeugt das Downsampling ein Aliasing wegen der Modulation mit π:

$$(Mf)(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) f\left(\frac{\omega}{2}\right) + H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) f\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)$$

wobei $(Mf)(i) = \sum_j m(i-j)f(j)$

- ebenso beim Transferoperator T:

$$(Tf)(\omega) = \left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 f\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2 f\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)$$

- Wichtig: Eigenschaften von M und T, denn Iteration des Lowpass-fIlters involviert deren Potenzen
- Der Transferoperator T ist einfacher als M, da $|H(\omega)|^2 \geq 0$ und HH^T positiv definit

- Nach i Iterationen $\phi^{(0\ldots i)}(t)$ sind die inneren Produkte

$$a^{(i)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(i)}(t)\phi^{(i)}(t+k)dt$$

Schlüsselpunkt: $Ta^{(i)}(k)$ liefert inneres Produkt $a^{(i+1)}(k)$

$\Rightarrow$ Potenzen von T (und deshalb Eigenwerte von T) bestimmen, ob der Kaskadenalgorithmus konvergiert (über euklidische/L^2-Norm)

- Eigenschaften von T geben Antworten über quadratische Mittelwerte

Wavelettheorie

Folgende Aussagen gelten:

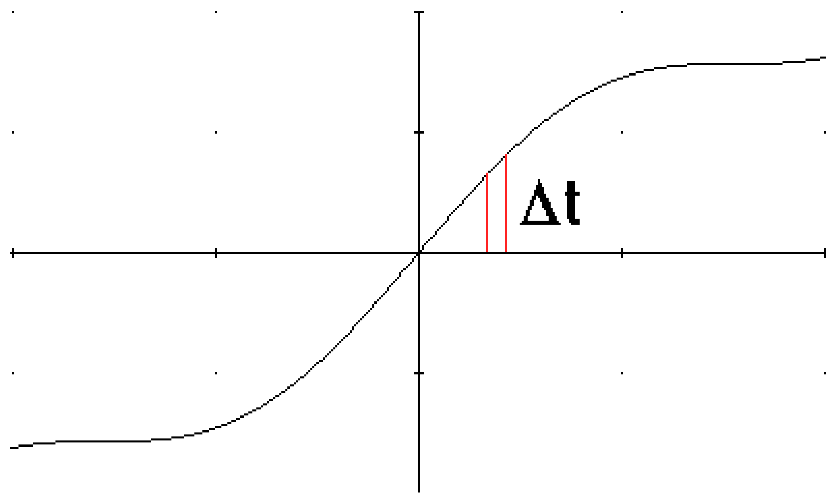
1. Kombination von $\phi(t-k)$ kann Polynome bis Grad p exakt produzieren, wenn M Eigenwerte $1, \frac{1}{2}, \ldots, (\frac{1}{2})^{p-1}$ hat
2. Sind die Wavelets orthogonal zu $1, \ldots, t^{p-1} \Rightarrow p$ Nullmomente *(=vanishing Moments)* [a]
3. T hat Eigenwerte $1, \ldots, (\frac{1}{2})^{2p-1}$ wenn M wie in 1
4. Der Kaskadenalgorithmus konvergiert auf $\phi(t)$ in L^2-Norm wenn die anderen Eigenwerte von T$= |\lambda| < 1$ sind
5. Wenn $\phi(t)$ und $w(t)$ s Ableitungen haben, dann sind die Eigenwerte von T$= |\lambda| \leq 4^{-s}$

- 1. $\longrightarrow$ neue Form von $A_p \Leftrightarrow p$ Nullen bei π (aus Faktor $(1+z^{-1})^p$ in $H(z)$)
- In 4 ist s nicht zwingend ganzzahlig, aber wir beschränken uns darauf
- Für T wird die Ordnung von Null $2p$

[a] Def: Das p-te Moment einer stetigen Funktion auf $[a, b]$ ist definiert als Größe $\int_a^b t^p f(t) dt$

Approximationsgüte

- Bei Anwendung von Wavelets wird $f(t)$ auf Raum V_j projiziert, j gibt die Zeitskala $\Delta t = \frac{1}{2j}$ an. Skalierungsfunktionen sind dann $2^{j/2}\phi(2^j t)$ und ihre Translationen mit $k\Delta t$



- Die Projektion ist dann $P(j) = f_j(t)$ und ist eine Kombination der Basisfunktionen:

$$\forall j : f_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{jk} 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$$

- Wavelets splitten Funktion in unterschiedliche Skalen auf (Multiresolution)
- Details werden auf Level j aufgelöst, der grobe Durchschnitt auf Level 0:

$$V_j = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots W_{j-1}$$

W =Waveleträume

Der Waveletraum

$$V_j = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots W_{j-1}$$

$$\Leftrightarrow f_j(t) = \sum_k a_{0k}\phi(t-k) + \sum b_{0k} w(t-k) + \sum_k b_{1k} 2^{1/2} w(2t-k) + \ldots$$

- j muss abgewogen werden: Qualität gegen Kosten
- Datenrate verdoppelt sich pro Level: 2 mal so viele Basisfunktionen, 2 mal so viele Koeffizienten
- Güte ist abhängig von
  - $f(t)$ – gegeben
  - Koeffizienten des Filters – wählbar
- Fehlerabschätung *typisch für Numerik*:

$$||f(t) - f_j(t)|| \approx C(\Delta t)^p ||f^{(p)}(t)||$$

- C und p hängen von *unserer* Wahl von $h(k)$ ab, diese legt dann $\phi(t)$ und somit die Unterräume fest.

Auswirkungen dieser Abschätzung:

- Jeder Levelschritt dividiert Fehler durch 2^p

$\Rightarrow$ p ist kritisch, d.h. wo ist ein guter Wert asymptotisch erreicht?

- C ist weniger wichtig, aber für Wavelets mehr als für Splines
- Der globale Fehler kann lokal abgeschätzt werden, wenn $f^{(p)}(t)$ global klein ist und plötzlich ihr Verhalten ändert

  $\longrightarrow$ Wavelets bieten dafür die „anpassbaren Maschen“, später dazu mehr!

  $\longrightarrow$ Verfeinerung um Faktor 2, aber leider Overhead (Abwägung)

Beweis der Fehlerabschätzung Sei g eine beliebige Funktion mit $g \in V_j$ und $P(f)$ eine lineare Projektion mit $P(f) = f_j$, dann setzen wir an:

$$f(t) - f_j(t) = f(t) - g(t) + g(t) - f(t)$$

da g in V_j liegt, ist $P_j(g) = g$ und wir können umformen:

$$f(t) - f_j(t) = (f - g)(t) + P_j(g - f)(t)$$

und unter euklidischer Norm ergibt sich

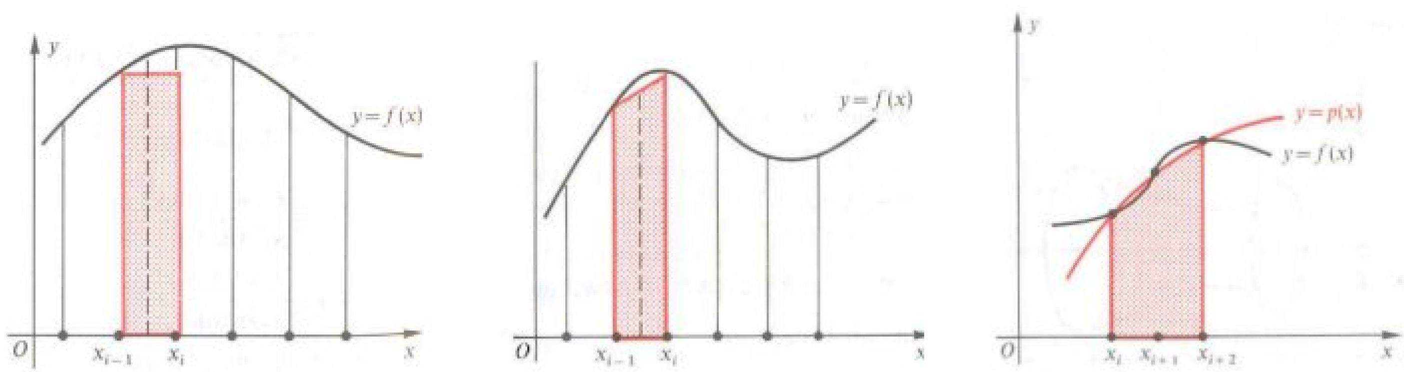
$$||f - f_j||_2 \leq ||f - g|| + ||P_j(f - g)|| \leq ||f - g||_2$$

g ist (lokal) wie ein Polynom weil $g \in V_j$. Somit entwickeln wir die Taylorreihe

$$f(t) - g(t) = \left| f(t) - \left[f(t_0) + \ldots + \frac{(t - t_o)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(t_0) \right] \right| = \text{Restglied}$$

- Anpassung der Potenz ist ein typisches Problem der numerischen Analysis, z.B. bei Integralen:

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum c_k f(t_k) \approx \begin{cases} (\Delta t)^1 & \text{Rechteckregel} \\ (\Delta t)^2 & \text{Trapezregel} \\ (\Delta t)^4 & \text{Simpsonsregel} \end{cases}$$



- Immer die Idee: Beachtet die Polynome

- Jede Funktion ist lokal einem Polynom ähnlich (Idee der Taylor-Reihe)
- p gibt den Grad des Polynoms an, dass den ersten Fehler ergibt

$\Rightarrow$ Wir werden die Güte durch Berechnung mit Polynomen bestimmen

- **VORSICHT:** Im Digitalbereich keine Funktion als Eingabe, sondern ein diskreter Vektor, der durch Sampling von $f(t)$ entstanden sein *kann*
  - direkte Übernahme kann die Projektion verfälschen
  - mehr dazu am Ende!

Bestimmung der Güte

- Die Näherung besteht aus Translationen der mitunter komplizierten Basisfunktionen $\phi(t)$ und $w(t)$

$\longrightarrow$ Die Berechnung von p geht stets auf die Koeffizienten $h(k)$ des Lowpassfilters zurück

$\longrightarrow$ Wir können p aus $h(k)$ oder $H(\omega)$ bestimmen

$\longrightarrow$ Die exakte Projektion auf V_0 ist unmöglich. Wir vermeiden eine solche Betrachtungsweise durch das Betrachten der Projektion $P_j \in V_0$ mit j genügend groß

Die Bedingung A_p

SATZ: Die Güte ist p wenn eine der folgenden äquivalenten Formulierungen gilt

(i) $\sum_{n=0}^{N}(-1)^n n^j h(n) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$ (Summenregel)

(ii) p Nullen bei π: $H(\omega) = (\frac{1+e^{-i\omega}}{2})^p Q(\omega)$ und $H(z) = (\frac{1+z^{-1}}{2})^p Q(z)$

(iii) p Eigenwerte der Matrix $M = (\downarrow 2)2H = \{2h(2i-j)\}$:

$$M\phi^j = (\frac{1}{2})^j \phi^{(j)} \text{für } j = 0, 1, \ldots, p-1$$

Beweis: $i) \Longleftrightarrow ii)$

Substitution $\omega = \pi$ in der Frequenzantwort und dann ableiten:

$$\sum h(n)e^{-in\pi} = h(0) - h(1) + h(2) - \ldots \Leftrightarrow H = 0 \text{ bei } \omega = \pi$$

$$\sum h(n)(-in)e^{-in\pi} = -i(0h(0) - 1h(1) + 2h(2) - \ldots \Leftrightarrow H' = 0 \text{ bei } \omega = \pi$$

analog für höhere Ordnungen $\square$

Beweis A_p – Eigenwerte

Angenommen $H(\omega)$ ist p-te Potenz von $\frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega})$

$\Rightarrow$ p Nullen bei $\pi, Q = 1$

$\Rightarrow$ Dann sind *alle* Eigenwerte Potenzen von $\frac{1}{2}$!

Beispiele für $p = 2, 3, 4$ die von Doubleshifts von $1, 2, 1$; $1, 3, 3, 1$ und $1, 4, 6, 4, 1$ kommen

$$m_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 1; \tfrac{1}{2}$$

$$m_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 1; \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4}$$

$$m_4 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 1; \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{4}; \tfrac{1}{8}$$

- Die $N \times N$-Matrix m hat die Einträge $2h(2i - j)$ für $i, j =, 1, \ldots, N - 1$
- m ist eine Submatrix von der unendlichen Matrix M
- Die Eigenwerte von M sind die selben wie bei m, wobei die Eigenvektoren mit 0 in beide Richtungen erweitert sind

Wann hat m diese Eigenwerte?

Um dies zu zeigen, erhöhen wir die Zahl der Nullen bei π Schritt für Schritt in der z-Domain.

- jede neue Null bei $z = 1$ kommt dann wieder von einer Multiplikation mit $\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)$

Wir zeigen:

1. Neue Eigenwerte von m sind die Hälfte der alten Eigenwerte
2. Es gibt den neuen zusätzlichen Eigenwert $\lambda = 1$ mit linkem Eigenvektor $e_0 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 \cdots & 1 \end{array}\right]$, der rechte Eigenvektor gibt den Wert von $\phi_{neu}(n)$ an (diskret).
3. Die neuen Eigenvektoren sind die (inneren) Differenzen der alten Eigenvektoren x_{alt}:

$$x_{neu} = x_{alt}(k) - x_{alt}(k-1) \text{ und } X_{neu}(z) = (1 - z^{-1})X_{alt}(z)$$

Beweis:

Voraussetzungen:

$$z = e^{i\omega}$$

$$H(z)X(z) + H(-z)X(-z) = \sum a_l z^l + \sum a_l z^{-l}$$

$$H(z)X(z) = \sum_l z^l \sum_j h(l-j)x(j) \equiv \sum a_l z^l$$

$$mx = \lambda x \Leftrightarrow H(z)X(z) + H(-z)X(-z) = \lambda X(z^2)$$

- Das neue $H(z)$ erhält den Extrafaktor $\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)$
- Das neue $X(z)$ erhält den Extrafaktor $(1-z^{-1})$:

$$\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right) H(z)(1-z^{-1})X(z) + \left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right) H(-z)(1+z^{-1})X(-z) =$$

$$\frac{1}{2}\lambda(1-z^{-2})X(z^2)$$

- Der ganze Beweis liegt in $\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)(1-z^{-1}) = \frac{1}{2}(1-z^{-2})$

Linke Eigenvektoren

- Auch von Interesse sind die linken Eigenvektoren $y : ym = \lambda x$
- Es gilt $(ym)^T = \lambda y^T = m^T y^T$
- Für die speziellen Eigenwerte $\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ sind die Eigenvektoren diskrete Polynome, d.h. die Kombinationen von $e_0, e_1, \ldots, e_k$:

$$e_0 = \begin{bmatrix} 1 \ 1 \ \ldots \ 1 \end{bmatrix}, e_1 = \begin{bmatrix} 0 \ 1 \ \ldots \ N-1 \end{bmatrix}, e_k = \begin{bmatrix} 0^k \ 1^k \ \ldots \ (N-1)^k \end{bmatrix}$$

- insbesondere $e_0 = me_0$

- Besonders interessant: Eigenvektor $y_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ für $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2h(0) & & & \\ 2h(2) & 2h(1) & 2h(0) & \\ & 2h(3) & 2h(2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \sum 2h(2k) = 1 \wedge \sum 2h(2k+1) = 1$$

- äquivalent zur ersten Summenregel und zur Lowpassregel
  $h(0) - h(1) + \ldots = 0$ bzw. $h(0) + h(1) + \ldots = 1$

Auch die linken Eigenvektoren kommen von den alten linken Eigenvektoren, summieren sich aber anstatt sich zu subtrahieren

Beweis: Wir betrachten die Eigenvektoren aber mit m^T unter $(\uparrow 2)$

- Noch interessant: Matrizen aus den linken Eigenvektoren sind die Inversen der rechten Eigenvektor-Matrizen $\Rightarrow$ so genannte *Biorthogonalität*
- Diagonalisierung $S^{-1}MS$ hat die rechten Eigenvektoren in den Spalten von S und die linken Eigenvektoren in Zeilen von S^{-1}

Unendliche Matrizen

Im Falle unendlicher Matrizen gilt:

- linke Eigenvektoren werden *nicht* durch Nullen erweitert
- $\forall n : e_1(n) = n \Leftrightarrow e_1 = \begin{bmatrix} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \end{bmatrix}$
- e_k wird als Polynom erweitert
- Die Kombination, die für endliche Matrizen Eigenvektoren ergibt, ergibt auch unendliche Eigenvektoren

Der Raum $V_0 = \{\phi(t+n)\}_{n\in\mathbb{R}}$

Der linke Eigenvektor $y_k M = (\frac{1}{2})^k y_k$ gibt die Kombination von Skalarfunktionen an, die gleich t^k sind:

$$\sum y_k(n)\phi(t+n) = t^k, k = 0, 1, \dots, p-1$$

Darum enthält der von $\{\phi(t+n)\}$ aufgespannte Raum V_0 alle Polynome mit Grad$< p$!

<u>Beweis:</u>Zu zeigen: Inneres Produkt $G(t) = y_k\Phi_\infty(t) = \sum y_k(n)\phi(t+n)$ ist Vielfaches von t^k

1. y_k ist linker Eigenvektor von M
2. $\Phi_\infty(t) = M\Phi_\infty(2t)$ löst die *dilation equation*

$$\Rightarrow \underbrace{y_k\Phi_\infty(t)}_{G(t)} = y_k M\Phi_{\infty(2t)} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k y_k\Phi_\infty(2t)}_{(\frac{1}{2})^k G(2t)}$$

$\Rightarrow$ $G(t)$ ist Vielfaches von t^k

Wegen des Einsvektors e_0 folgt:

$$\sum y_0(n)\phi(t+n) = t^0 \text{ mit } y_0 = e_0$$

$$\sum \phi(t+n) = 1$$

$\Rightarrow p$ ist mindestens 1 und da das Wavelet orthogonal zu 1 ist:

$$\int 1 w(t)dt = 0$$

dies ist das erste *vanishing moment*

Wichtig: 1 und t können durch Daubechies' Skalierungsfunktion $\phi(t) = D_4(t)$ erzeugt werden

$\Rightarrow$ Hier hat $H(z)$ den Extrafaktor $\frac{1}{2}[1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3})z^{-1}]$ wegen der Doppelshiftorthogonalität

$$\frac{1}{4}\left|\begin{array}{ccc|cc}
\text{3×3-Matrix} & & & \text{Eigenwerte} & \text{Eigenvektoren} \\
1+\sqrt{3} & & & \lambda = 1 & y_0 = [1\;1\;1] \\
3-\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & \lambda = \frac{1}{2} & y_1 = [3-\sqrt{3}\;1-\sqrt{3}\;\;-1-\sqrt{3}] \\
 & 1-\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & \lambda = \frac{1+\sqrt{3}}{2} & y_2 = [1\;0\;0]
\end{array}\right.$$

$\Rightarrow \sum \phi(t-n) = 1, \sum y_1(n)\phi(t+n) = q\cdot t$

$\Rightarrow$ V_0 (Daubechiesraum) enthält 1 und t und ist orthogonal zu den Wavelets in W_0:

$$\int w(t)dt = 0 \text{ und } \int tw(t)dt = 0$$

$\Rightarrow$ Daubechiesraum hat 2 *vanishing moments*

Korollar: Wenn $H(\omega)$ p Nullen bei π hat, haben die zu $\phi(t-n)$ orthogonalen Wavelets p *vanishing moments*.

Dies sind die *Synthese-Wavelets* $\tilde{w}(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(t)dt = 0, \int_{-\infty}^{\infty} t\tilde{w}(t)dt = 0, \ldots, \int_{-\infty}^{\infty} t^{p-1}\tilde{w}(t)dt = 0$$

Grund: $1, \ldots, t^{p-1}$ sind Kombinationen von $\phi(t-n)$.

Orthogonalität zu diesen Polynomen bedeutet p Nullmomente

- V_0 ist orthogonal zu $\tilde{W}_0$ (statt W_0)

$\longrightarrow$ $\tilde{w}(t)$, nicht w hat p Nullmomente

Aber:

- Bei orthogonalen Beispielen wie Daubechies-Wavelets ist

$$\tilde{W}_0 = W_0$$

$$\tilde{w}(t) = w(t)$$

- Biorthogonaler Fall:

  Analysefilter hat $\tilde{p}$ *vanishing moments* $\Leftrightarrow$ Synthesefilter hat π Nullen bei π

Veranschaulichung: D_4 reproduziert 1 und t exakt auf einem endlichen Intervall

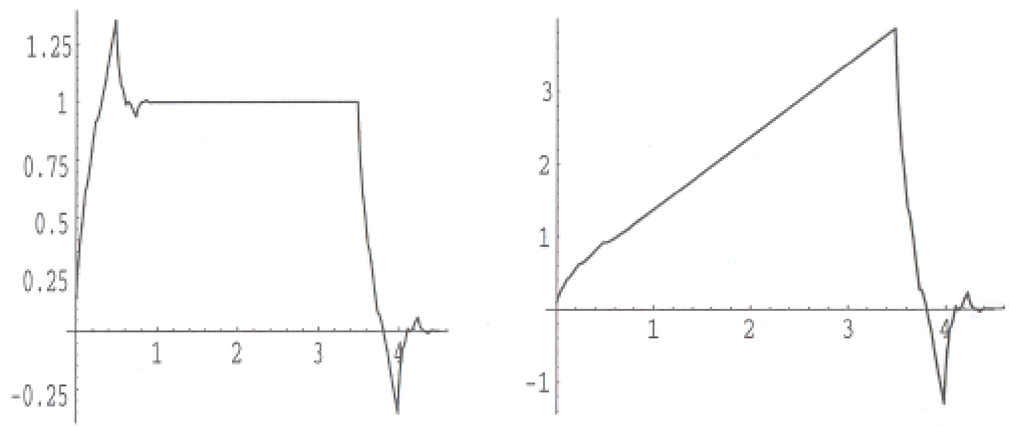


Figure 7.1: A combination of $D_4(t+n)$ can exactly reproduce 1 and t on any interval.

Approximationen durch Funktionen in V_j

- In stetiger Zeit werden Vektoren und Matrizen durch Funktionen in t ersetzt
- $h(k) \xrightarrow{Iteration} \phi(t)$, deren Translationen $1, \ldots, t^{p-1}$ reproduzieren können und somit Polynome mit Grad$\leq p$
- Der Träger ist $[0, N]$
- Wir können Glätte annehmen

➢ Eine Aufgabe der “harmonischen Analysis”

Exkurs: Harmonische Analysis

- Lehre von Funktionsräumen und -transformationen
- Der Name kommt von der Fouriertransformation

$\longrightarrow$ Analysiert $f(t)$ als Summen von *Harmonien* $e^{i\omega t}$

- Schlüsselproblem: Verbindung der Eigenschaften von f(t) mit denen der Transformation, insbesondere der Größe der Fourierkoeffizienten)

$\longrightarrow$ Da $\sin \omega t$,$\cos \omega t$ und $e^{i\omega t}$ nicht-lokalen Träger haben, ist der Reihenabbruch kritisch

  – Koeffizientengröße sagt nicht alles aus

  – Nur in euklidischer Norm perfekte Übereinstimmung:

$$\text{Energie } \int |f(t)|^2 dt = \text{Energie } \frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

  – In anderen L^p-Normen und anderen Funktionsräumen entscheidet $|\hat{f}(\omega)|$ nicht vollständig, ob $f(t)$ zu dem Raum gehört

$\Rightarrow$ Wir brauchen die Phase (=Winkelposition)

- Betrag kann nie komplett sein

- Für lokale Wavelets ist das anders: Beträge reichen!
- Wir können den Raum von Funktionen $f(t)$ mit einem Raum aus Waveletkoeffizienten b_{jk} treffen!
- Liegt $f(t)$ in L^p, dann liegen die Koeffzienten im diskreten Raum ℓ^p:

$$A \int |f(t)|^p dt \leq \sum_{j,k} |b_{jk}|^p \leq B \int |f(t)|^p dt$$

- In der Sprache der harmonischen Analysis: „ Die Wavelets sind eine unbedingte Basis, wenn $p > 1$ ist“

- Wenn die Wavelets eine unbedingte Basis sind, dann heißt das $|b_{jk}|$ gibt ausreichende Information (auch ohne Phase)
- Für einfachste Basis L^2 ist die unbedingte Basis eine Riesz-Basis:

$$A \int |\sum a_n \phi(t-n)^2| dt \leq \sum |a_n|^2 \leq B \int |\sum a_n \phi(t - in)|^2 dt$$

$\Rightarrow$ Dann trifft die Anforderung aus Kapitel 6.5 an $A(\omega) = \sum a(k) e^{ik\omega}$ auf die Translationsinvarianz der Basis $\phi(t-n)$ zu:

$$\forall \omega : 0 \leq A \leq A(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi + k)|^2 \leq B$$

(A, B abhängig von $a(k)$ und den Eigenvektoren $a = Ta$)

- ähnliche Ungleichung für die Waveletbasis $wjk(t)$ und die Koeffizienten b_{jk}

Approximation durch Wavelets: Fehler $f(t) - f_j(t)$

Nochmals: Die Zahl $p =$ Zahl der Nullen bei π gibt an, wie viele Wavelet-/Skalierungsfunktionen zur Approximation von $f(t)$ benötigt werden

- Je glatter die Funktion und je höher p ist, desto schneller gehen die Expansionskoeffizienten gegen 0 und umso weniger davon brauchen wir

$\longrightarrow$ Zentrales Problem der harmonischen Analyis:

BASIS MIT GUTER APPROXIMATION
UND MIT WENIGEN BASISFUNKTIONEN [a] FINDEN

- Die beste Basis hängt vom Signal ab
- Wir suchen eine Basis für eine ganze Klasse von Signalen
- Für glatte Signale ist die Fouriertransformation zufrieden stellend

[a] z.B. Wavelets oder Harmonien $e^{i\omega}$

Wichtigste Erkenntnis der Wavelettheorie:

Für *stückweise* stetige Funktionen ist eine Waveletbasis besser!

- Raum approximierender Funktion$= V_j$

$\longrightarrow$ Skala $\Delta t = 2^{-j}$

- Dieser Raum wird aufgespannt durch Skalarfunktionen $\phi(2^j t - k)$ und durch Wavelets $w_{jk}(t)$ für alle Skalen unter j

$\Rightarrow$ Wir könnten entweder ein Basis wählen, denn Multiresolution bedeutet

$$V_j = V_0 \oplus W_0 \oplus \ldots \oplus W_{j-1}$$

- Aber: Die Basis ist unwichtiger, denn wir suchen nach der besten Funktion im Raum
- Wenn $H(\omega)$ p Nullen bei π hat, ist jede Funktion mit p Ableitungen approximiert bis zur Ordnung $(\Delta t)^p = 2^{-jp}$ durch Projektion $f_j(t)$ in V_j:

$$||f(t) = f_j(t)|| \leq C(\Delta t)^p ||f^{(p)}(t)||$$

ausgeschrieben:

$$||f(t) - \sum_k a_k^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k)|| \leq C 2^{-jp} ||f^{(p)}(t)||$$

Beispiel: Approximation für Boxfunktionen oder Haarwavelets

- Fehler der Ordnung Δt da $p = 1$
- Die engste Konstante auf dem Intervall $[0, \Delta t]$ ist $a_1 = \frac{\Delta t}{2}$
- Fehler $f(t) - f_0(t)$ auf dem Intervall ist dann $t - \frac{\Delta t}{2}$
- Größter Fehler $\frac{\Delta t}{2}$ bei $t = 0$
- Der Fehler in L^2-Norm ist

$$\left\|t - \frac{\Delta t}{2}\right\| = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)^2 dt} = \frac{\Delta t}{2\sqrt{3}}$$

- Die Potenz von Δt ist das Wichtigste bei der Fehlerabschätzung
- C kann bei gewissen Funktionen groß werden (und somit wichtiger)

Hauptsache ist:

- $\{\phi(t+k)\}$ kann lokal $1 \ldots t^{p-1}$ produzieren, d.h. wir treffen den Anfang der Taylorreihe
- Der Fehler ist dann die Summe der fehlenden Glieder ϑ

$\Rightarrow$ Genau das produziert den $(\Delta t)^p f^{(p)}(t)$ in der Fehlerabschätzung

Die STRANG-FIX-Condition

- Die Anforderung an $H(\omega)$, p Nullen bei π zu haben, führt zu folgender Anforderung an $\hat{\phi}$ (Fouriertransformation von ϕ):

$$\boxed{\hat{\phi}(\omega) \text{ muss Nullen der Ordnung } p \text{ bei allen Frequenzen } \omega = 2\pi n, n \neq 0 \text{ haben}}$$

Dies ist die STRANG-FIX-Condition, benannt nach Gilbert Strang und George Fix

Verbindung zu Nullen von $H(\omega)$: $\hat{\phi} = \prod_1^\infty H\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$

mit $\omega = 2\pi$ schreiben wir $n = 2^j q$, q gerade

$\Rightarrow$ $(j+1)$ter Faktor im unendlichen Produkt ist $H(2\pi n/2^{j+1}) = H(q\pi)$

$\Rightarrow$ Null p-ter Ordnung von $H(\omega), \omega = \pi$ führt zu Null p-ter Ordnung von $\hat{\phi}$ bei $\omega = 2\pi n$

$\Rightarrow$ STRANG-FIX-Bedingung für $\hat{\phi}(t) \Longleftrightarrow A_p$ auf $H(\omega)$

Die Wahl von p

- Ein „gutes“ p stabilisiert die Iteration, aber ohne den Lowpass-Filter zu überanspruchen
- Oft reichen zwei Ableitungen für $\phi(t)$, was ab $p \approx 4$ eintritt
- Andere Designer akzeptieren kleinere p

Der Abfall der Waveletkoeffizienten

- Die Ordnung p erlaubt es, Waveletkoeffizienten schnell zu verkleinern

$\longrightarrow$ passiert bei der Fouriertransformation automatisch

ABER: Ein Funktionssprung und Schrumpfung wird durch $\frac{1}{k}$ begrenzt

$\Rightarrow$ Bei Wavelets greift die Multiresolution

$\Rightarrow$ Wenn $f(t)$ p Ableitungen besitzt, fallen die Koeffizienten wie $\frac{1}{2^{jp}}$ ab:

$$|b_{jk}| = \left| \int f(t) w_{jk}(t) dt \right| \leq C 2^{-jp} \left\| f^{(p)}(t) \right\|$$

- erstes *vanishing moment* heißt $\int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt = 0$
- unendliches Integral ist kompakt ungleich 0:

$$I_1(t) = \int_{-\infty}^{t} w(u)du \text{nur auf } [0, N] \text{ ungleich Null}$$

- $I_1(t)$ ist begrenzt und hat nur endliche Energie
- Für Haar-Wavelets ist dies die Hutfunktion

Beweis: Partielle Integration liefert wegen des vanishing moments:

$$b_{jk} = 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) 2^{j/2} I_1(2^j t - k) dt = O(2^{-j})$$

- Schritte $I_1(t), I_2(t), \ldots, I_p(t)$ führen zu

$$|b_{jk}| = \left| 2^{-jp} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(p)}(t) 2^{j/2} I_p(2^j t - k) dt \right| \leq C 2^{-jp} \left\| \int f^{(p)}(t) \right\|$$

- Auch wenn $f(t)$ mehr Ableitungen besitzt, können wir nicht weiter machen, denn $I_p(t)|_{-\infty}^{\infty} \neq 0$!

$\Rightarrow$ sonst wäre $p = p + 1$ $\Rightarrow$Widerspruch

- $I_{p+1}(t)$ ist konstant $\neq 0$ für große t $\Rightarrow$ unendliche Energie
- Für Haar-Wavelets: $p = 1$: $f(t) - f(t - 2^j)$

  Liefert die Integration hier die direkte Abschätzung $|b_{jk}| = O(2^-j)$
- Generell: Teilweises Integrieren führt zu $f'(t)$ mal Hutfunktion I_1 mal 2^{-j}

Samplewerte vs. Expansionskoeffizienten

Typisches Vorgehen:

Funktion $x(t)$ $\rightarrow$Samples $\mathbf{x}(n)$$\rightarrow$Eingabe in die Filterbank. Ist das legal?

NEIN, ES IST EIN WAVELETVERBRECHEN

- Einige können sich nicht vorstelllen, so vorzugehen, andere nicht, es nicht zu tun
- Bequem:
  - Vielleicht kennen wir $x(t)$ nicht; vielleicht keine Kombination von $\phi(t-k)$
  - Die Berechnung der wahren Koeffizienten dauert zu lange
- Aber
  - Das „Verbrechen“ kann nicht inbeachtet bleiben
  - Wir nehmen hier eine spezielle stetige Funktion an
  - Der Pyramidenalgorthmus arbeitet auf $\mathbf{x}(n)$als ob es Koeffizienten der zu Grunde liegenden Funktion währen:

$$x_s(t) = \sum \mathbf{x}(n)\phi(t-n)$$

- Korrekt, wenn $\phi(k) = \delta(k)$ $\Rightarrow$einziger Term bei $t = n$ ist $\mathbf{x}(n)$
- Dies trifft natürlich auf die meisten Funktionen nicht zu

Mögliche Lösung:

$$\text{Bestimme } a_{int}(k) \text{aus } \mathbf{x}(n) = \sum a_{int}(k)\phi(k-n)$$

wir erhalten eine konstant-diagonale Toeplitz-Matrix mit Einträgen
$n, k = \phi(-kn)$ $\rightarrow$ wir invertieren einen FIR-Filter $\sum \phi(k)e^{-i\omega}$

$\rightarrow$ Dann sind die Koeffizenten inneres Produkt $\left\langle x(t-k), \phi\tilde{(t)} \right\rangle$:

$$a(k) = \int x(t)\hat{\phi}(t-k)dt \Rightarrow a_q(k) = \sum \mathbf{x}(n)\tilde{\phi}(n-k)$$

(Für Daubechies: $\tilde{\phi} = \phi$ wegen Orthogonalität)

- Da außer $sinc$-Wavelets und Dualen zu Splines die Wavelets kompakten Träger haben, lautet eine vorsichtige Wahl für einen idealen Vorfilter

$$x_q(t) = \sum a_q(k)\phi(t-k)$$

- VORSICHT: In stetiger Zeit passt die Synthese über eine Summe zur Analysis mit Integral. Im disketen Fall wird das Integral zur Summe und die Inverse ist nicht die Inverse der Matrix
- ABER: Die Näherung ist korrekt für Polynome bis Grad p ($\tilde{p}$):

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n^r \phi(n) = \int_{-\infty}^{\infty} t^r \phi(t) dt, r < p$$

  Für die linke Seite gilt nach Poissons-Summenformel:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n^r \phi(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} i^r \hat{\phi}^{(r)}(2\pi k)$$

- Dann sind auf der rechten Seite alle Terme 0 für $k \neq 0$ nach Strang-Fix

$\Rightarrow$ Daraus folgt die Zusicherung für Polynome mit Grad$< p$

Empfehlung der Buchautoren

$\mathbf{x}(n)$über die inneren Produkte in Koeffizienten konvertieren, dann filtern, dann nachfiltern um den Samplewert wiederherzustellen

Andere Möglichkeiten:

- $x(t)$ Band-limitieren nach Samplingtheorem $x(t) = \sum sinc(t-n)x(n)$

$\Rightarrow$ Projektion des limitierten $x(t)$ auf V_0 ergibt $\sum a_{bl}(k)\phi(t-k)$ (Flandrin-Verfahren)

- $\mathbf{x}(n)$als Durchschnittswerte ansehen $\longrightarrow$ Projektion auf $V_0 \Rightarrow \sum a_{ave}(k)\phi(t-k)$

Es gibt keine eindeutige Antwort aber die Samples düfen nicht einfach durch die Filterbank geschickt werden!

Quellen

- G. Strang, T. Nguyen, Wavelets and Filter Banks, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1997.
- Abb. S. 12 Schülerduden Mathematik II, Dudenverlag, Mannheim, 1991